

Тема: «Производная сложной функции»

1. Сложная функция. Начнем с примера.

■ **Пример 1.** Пусть требуется вычислить по заданному значению x соответствующее значение z функции h , заданной формулой

$$z = h(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Для этого надо сначала вычислить по заданному x значение

$$y = f(x) = 1 - x^2,$$

а затем уже по этому y вычислить

$$z = g(y) = \sqrt{y}.$$

Итак, функция f ставит в соответствие числу x число y , а функция g — числу y число z . Говорят, что h есть *сложная функция*, составленная из функций g и f , и пишут:

$$h(x) = g(f(x)).$$

Чтобы вычислить значение сложной функции $h(x) = g(f(x))$ в произвольной точке x , сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а затем $g(y)$.

Если функция f имеет производную в точке x_0 , а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причем

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad (1)$$

■ **Пример 1** Вернемся к поставленной выше задаче и найдем производную функции $h(x) = (2x + 3)^{100}$.

Функцию h можно представить в виде сложной функции

$$h(x) = g(f(x)), \text{ где } g(y) = y^{100}, y = f(x) = 2x + 3.$$

Так как $f'(x) = 2$ и $g'(y) = 100y^{99}$, имеем

$$h'(x) = 2 \cdot 100y^{99} = 200(2x + 3)^{99}.$$

Пример 2 Найдем производную функции

$$h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}.$$

Так как $h(x) = g(f(x))$, где $y = f(x) = 3x^2 + 1$, $g(y) = \sqrt{y}$, то $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и $y' = f'(x) = 6x$, откуда

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

Найдите производные:

а) $h(x) = \cos 3x$;

а) $y = \sqrt{\cos x}$;

в) $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

а) $h(x) = (3 - 5x)^5$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$;

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

в) $h(x) = (2x + 1)^7$;

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|------------------------|---------------------------|
| $C - \text{const}$ | 0 |
| x | 1 |
| $Kx + b$ | k |
| x^2 | $2x$ |
| x^3 | $3x^2$ |
| x^n | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| e^x | e^x |
| a^x | $a^x \cdot \ln a$ |
| $\ln a$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \cdot \ln a}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

Правила вычисления производных

| | |
|----------------------------------|---|
| 1. $(U + Y)' = U' + Y'$ | 3. $(U \cdot Y)' = U' \cdot Y + U \cdot Y'$ |
| 2. $(k \cdot U)' = k \cdot (U)'$ | 4. $\left[\frac{U}{Y} \right]' = \left[\frac{U' \cdot Y - U \cdot Y'}{Y^2} \right]$ |

